Estructuras Algebraicas Primer examen parcial	1^{er} Apellido: ______	11 de abril de 2014
Departamento Matem. aplic. TIC ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2^{o} Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	Tiempo 2 h. **Calificación:**

Ejercicio 1 (1 punto)

Demostrar que A_8 tiene un elemento de orden 15

Ejercicio 2 (5 puntos)

En el grupo diédrico $D_9 = \langle g, s : |g| = 9, |s| = 2 \text{ y } sg = g^{-1}s\rangle$ se considera el subgrupo $N = \langle g^3\rangle$

a) Calcular el orden de cada elemento de D_9

b) Demostrar que N es un subgrupo normal de D_9

c) Listar todos los elementos del grupo cociente D_9/N

d) Calcular el orden de cada elemento del grupo cociente D_9/N.

e) Estudiar si D_9/N es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$, a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, a S_3 o a ninguno de ellos.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Si $\varphi : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{18}$ es un homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$ y $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$, determinar justificadamente los valores que puede tomar $\varphi([1]_{24})$ según sea el valor de $|\varphi(\mathbb{Z}_{24})|$ y obtener en cada caso $|\ker(\varphi)|$

Ejercicio 4 (2 puntos)

Encontrar, salvo isomorfismos, todos los grupos abelianos de orden 180. Dar los factores invariantes de cada uno y estudiar cuáles de ellos tienen un elemento de orden 4.

Soluciones

Ejercicio 1

$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7,8) = (1,2)(2,3)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8) \in S_8$ es una permutación par $\Rightarrow \sigma \in A_8$ y se verifica que $|\sigma| = \text{mcm}(3,5) = 15$

Ejercicio 2

a) $|g| = 9$, $|s| = 2$ y para todo $r \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$ es $|g^r| = \frac{|g|}{\text{mcd}(|g|,r)} \Rightarrow |g^2| = |g^4| = |g^5| = |g^7| = |g^8| = |g| = 9$ y $|g^3| = |g^6| = 3$, por otra parte para todo $r \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$ es $(g^r s)(g^r s) = g^r(sg^r)s = g^r(g^{-r}s)s = e$ por tanto $|gs| = |g^2s| = |g^3s| = |g^4s| = |g^5s| = |g^6s| = |g^7s| = |g^8s| = |s| = 2$.

b) $N = \langle g^3 \rangle = \{e, g^3, g^6\}$, $|N| = 3$. Todo subgrupo $H \leq D_9$ con $|H| = 3$ verifica, por el teorema de Lagrange, que $\forall\ a \in H$ con $a \neq e$ es $|a| = 3$. Los únicos elementos de orden 3 en D_9 son g^3, g^6 $\Rightarrow e, g^3, g^6 \in H \Rightarrow H = N$, se deduce que el único subgrupo de D_9 con orden 3 es N, por tanto $N \trianglelefteq D_9$

c) $D_9/N = \{eN, gN, g^2N, sN, gsN, g^2sN\}$, siendo:
$eN = \{e, g^3, g^6\}$, $\quad gN = \{g, g^4, g^7\}$, $\quad g^2N = \{g^2, g^5, g^8\}$,
$sN = \{s, g^6s, g^3s\}$, $\quad gsN = \{gs, g^7s, g^4s\}$, $\quad g^2sN = \{g^2s, g^8s, g^5s\}$

d) $|eN| = 1$; $\quad (gN)^3 = g^3N = eN \Rightarrow |gN| = 3$; $\quad (g^2N)^3 = g^6N = eN \Rightarrow |g^2N| = 3$; $(sN)^2 = s^2N = eN \Rightarrow |sN| = 2$; $\quad (gsN)^2 = eN \Rightarrow |gsN| = 2$; $\quad (g^2sN)^2 = eN \Rightarrow |g^2sN| = 2$.

e) $(sN)(gN) = g^2sN \neq gsN = (gN)(sN)$ por tanto el grupo D_9/N no es abeliano, así que $D_9/N \not\approx \mathbb{Z}_6 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.
$D_9/N = \langle gN, sN : |gN| = 3, |sN| = 2$ y $(sN)(gN) = (gN)^{-1}(sN)\rangle \Rightarrow D_9/N \approx D_3 \approx S_3$.

Ejercicio 3

Por el corolario del primer teorema de isomorfía $|\varphi(\mathbb{Z}_{24})| \mid \text{mcd}(24,18) \Rightarrow |\varphi(\mathbb{Z}_{24})| \in \{1,2,3,6\}$.
Si $|\varphi(\mathbb{Z}_{24}))| = 1 \Rightarrow \varphi([1]_{24}) = [0]_{18}$, $\quad |\ker(\varphi)| = 24$
Si $|\varphi(\mathbb{Z}_{24}))| = 2 \Rightarrow \varphi([1]_{24}) = [9]_{18}$, $\quad |\ker(\varphi)| = 12$
Si $|\varphi(\mathbb{Z}_{24}))| = 3 \Rightarrow \varphi([1]_{24}) = [6]_{18}$ o $\varphi([1]_{24}) = [12]_{18}$, $\quad |\ker(\varphi)| = 8$
Si $|\varphi(\mathbb{Z}_{24}))| = 6 \Rightarrow \varphi([1]_{24}) = [3]_{18}$ o $\varphi([1]_{24}) = [15]_{18}$, $\quad |\ker(\varphi)| = 4$

Ejercicio 4

Si $2^2 = 4 = \text{mcm}(a,b) \Rightarrow 2^2|a$ o $2^2|b$, por tanto:
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \approx \mathbb{Z}_{180}$, factores invariantes: (180), sí tiene elementos de orden 4: $[45]_{180}$
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \approx \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_3$, factores invariantes: $(60,3)$, sí tiene elementos de orden 4: $([15]_{60}, [0]_3)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \approx \mathbb{Z}_{90} \times \mathbb{Z}_2$, factores invariantes: $(90,2)$, no tiene elementos de orden 4: $4 \nmid 90$ y $4 \nmid 2$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \approx \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_6$, factores invariantes: $(30,6)$, no tiene elementos de orden 4: $4 \nmid 30$ y $4 \nmid 6$